□07□ □□□□□:□□

□□□□□□□□□□

□□□□□□□7□□□

1□□□□□ $f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}(a>0)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □□□□ $\frac{x_1}{x_2}<\frac{e}{a}$ □

□□□□□□□ $f'(x)=1-\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}}$ □

□ $f'(x)>0$ □□ $x<alna$ □□ $f'(x)<0$ □□ $x>alna$ □

$\therefore f(x)$ □ $(-\infty,alna)$ □□□□□□□ $(alna,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore f(x)$ □ $x=alna$ □□□□□□□□□□□□□□□ $f(alna)=alna-a$ □

□□□ $f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}(a>0)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□ $alna-a>0$ □

□ $a>e$ □

f □a□ $=a-e>0$ □

$\therefore x_1<a<alna<x_2$ □

$\therefore x_2-x_1>alna-a=-aln\frac{e}{a}$ □

□ $x_1-x_2<aln\frac{e}{a}$ □

□ $\frac{1}{a}(x_1-x_2)<ln\frac{e}{a}$ □

$x_1=e^{\frac{x_1}{a}}$ □ $x_2=e^{\frac{x_2}{a}}$ □

$\therefore \frac{x_1}{x_2}=\frac{e^{\frac{x_1}{a}}}{e^{\frac{x_2}{a}}}=e^{\frac{1}{a}(x_1-x_2)}<e^{ln\frac{e}{a}}=\frac{e}{a}$ □

2□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=lnx-ax+\frac{1}{2}x^2$ □

（1）当 $a=\frac{5}{2}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）已知 $a \geqslant \frac{4}{3}\sqrt{3}$，$x_1$，$x_2(x_1>x_2)$ 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，求 $y=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-\ln\frac{x_1}{x_2}$ 的最大值.

【解答】解：（1）当 $a=\frac{5}{2}$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x^2$，$x>0$，

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{5}{2}+x=\frac{(x-\frac{1}{2})(x-2)}{x}$，

令 $f'(x)>0$，可得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$，令 $f'(x)<0$，可得 $\frac{1}{2}<x<2$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$，$(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减.

（2）$f'(x)=\frac{1}{x}-a+x=\frac{x^2-ax+1}{x}$，

因为 x_1，$x_2(x_1>x_2)$ 为函数 $f(x)$ 的两个极值点，

所以 x_1，x_2 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的两个根，

所以 $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，可得 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{a-\sqrt{a^2-4}}=\frac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}$，

因为 $a \geqslant \frac{4}{3}\sqrt{3}$，所以 $y=a^2$ 为增函数，$y=a$ 为增函数且大于 0，$y=\sqrt{a^2-4}$ 为增函数且大于 0，

所以 $y=\frac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2}$ 为增函数，所以 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}{2} \geqslant \frac{\frac{16}{3}-2+\frac{8}{3}}{2}=3$，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}(t \geqslant 3)$，则 $y=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}-\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，

令 $g(t)=\frac{2(t-1)}{t+1}-\ln t=2-\frac{4}{t+1}-\ln t$，

$g'(t)=\frac{4}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=-\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$，所以 $g(t)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，

□□ $g(t)$ □□□□□ g□3□ $=1-ln3$□

3□□2021□•□□□□□□□□□ $f(x)=ae^{-x}+lnx-1(a\in R)$□

□1□□ $a\leqslant e$□□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□ $x_1+x_2\leqslant\frac{(2e+1)\cdot ln2e}{2e-1}$ □□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□□□□

□□□□□□1□□□□□□□□ $(0,+\infty)$ □ $f'(x)=-ae^{-x}+\frac{1}{x}=\frac{e^x-ax}{xe^x}$ □

□ $a\leqslant 0$ □□ $f'(x)>0$ □□□□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□ $0<a\leqslant e$ □□□ $f'(x)=0$ □□ $e^x-ax=0$ □□ $g(x)=e^x-ax$ □□ $g'(x)=e^x-a$ □

□□□□ $0<x<lna$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□□ $x>lna$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

$\therefore g(x)\geqslant g(lna)=e^{lna}-alna=a(1-lna)\geqslant 0$ □

$\therefore f'(x)\geqslant 0$ □ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□□ $a\leqslant e$ □□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□2□□□□□ $f'(x_1)=f'(x_2)=0$ □□ $\begin{cases}e^{x_1}-ax_1=0\\e^{x_2}-ax_2=0\end{cases}$ □

□□□□□□ $e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$ □□ $\frac{x_2}{x_1}=t$ □

□ $t>1$ □ $x_2=tx_1$ □ $e^{(t-1)x_1}=t$ □$\therefore x_1=\frac{lnt}{t-1}$ □ $x_2=\frac{tlnt}{t-1}$ □

∴ $x_1+x_2=\frac{(t+1)lnt}{t-1}$ □

□ $h(t)=\frac{(t+1)lnt}{t-1}(t>1)$ □

□ $h'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2lnt}{(t-1)^2}$ □

□ $\varphi(t)=t-\frac{1}{t}-2lnt$ □□ $\varphi'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$ □

□□ $\varphi(t)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ $\varphi(t)>\varphi$ □1□ $=0$ □

∴ $h'(t)>0$ □□ $h(t)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ $x_1+x_2\leqslant 2e-\frac{1}{2e}-2ln2e$ □□ $h(2e)=\frac{(2e+1)\cdot ln2e}{2e-1}$

∴ $h(t)\leqslant h(2e)$ □

∴ $t\in(1$ □ $2e]$ □□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□□□□ $2e$ □

4□□2021•□□□□□□□□ $f(x)=ae^x+lnx-1(a\in R)$ □

□1□□ a, e □□□□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□□□ $f(x)$ □□□□□□□ x_1 □ $x_2(x_1<x_2)$ □□ $x_1+x_2\leqslant 2ln3$ □□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□□□□

【解答】解：（1）函数的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-ae^{-x}+\frac{1}{x}=\frac{e^{x}-ax}{xe^{x}}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a\leqslant e$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $e^{x}-ax=0$，设 $g(x)=e^{x}-ax$，则 $g'(x)=e^{x}-a$，

易知，当 $0<x<\ln a$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x>\ln a$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a(1-\ln a)\geqslant 0$，

$\therefore f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

综上，当 $a\leqslant e$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）依题意，$f'(x_1)=f'(x_2)=0$，则 $\begin{cases} e^{x_1}-ax_1=0 \\ e^{x_2}-ax_2=0 \end{cases}$，

两式相除得，$e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$，设 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，$x_2=tx_1$，$e^{(t-1)x_1}=t$，

$\therefore x_1=\frac{\ln t}{t-1}, x_2=\frac{t\ln t}{t-1}$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，

设 $h(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^{2}}$，

设 $\varphi(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$，则 $\varphi'(t)=1+\frac{1}{t^{2}}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^{2}}{t^{2}}>0$，

$\therefore \varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 $\varphi(t)>\varphi$（1）$=0$，

$\therefore h'(t)>0$，则 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

又 $x_1+x_2\leqslant 2\ln 3$，即 $h(t)\leqslant 2\ln 3$，h（3）$=2\ln 3$，

$\therefore t\in(1$□$3]$□□$\frac{x_2}{x_1}$□□□□3□

5□□2021•□□□□□□□□□$f(x)=lnx$□

□1□□□$g(x)=x^2f(x)$□□□□□□

□2□□□$\forall x_1$□$x_2\in[1$□$+\infty)$□$f(x_1x_2)\leqslant(x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$□

□□□□□□□1□$f(x)=lnx$□$g(x)=x^2f(x)=x^2lnx$□$x\in(0,+\infty)$□

$g'(x)=x(2lnx+1)$□

□$g'(x)<0$□□□$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$□□$g'(x)>0$□□□$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$□

$\therefore$□□$g(x)$□□□□□□□$(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$□□□□□□□□$(\frac{1}{\sqrt{e}}$□$+\infty)$□

□2□□□$\forall x_1$□$x_2\in[1$□$+\infty)$□□□□$f(x_1x_2)\leqslant(x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$□

□□□□$lnx_1+lnx_2\leqslant x_1+x_2-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$□

□□□□$lnx_1-x_1+\frac{1}{x_1}+lnx_2-x_2+\frac{1}{x_2}\leqslant 0$□

□$h(x)=lnx-x+\frac{1}{x}$□$x\in[1$□$+\infty)$□□h□1□$=0$□

$h'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-(x^2-x+1)}{x^2}<0$□

$\therefore$□□$h(x)$□$x\in[1$□$+\infty)$□□□□□□

$\therefore h(x) \leq h$□1□$=0$□

$\therefore h(x_1)+h(x_2) \leq 0$□

□□ $\forall x_1$□$x_2 \in [1$□$+\infty)$□ $f(x_1x_2) \leq (x_1+x_2)(1-\frac{1}{x_1x_2})$ □□□

6□□2021□•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□

□2□□□ $a<\frac{5}{2}$ □□ $f(x)$ □□□□□□ x_1□x_2□□ $x_1<x_2$□□ $\frac{f(x_2)}{x_1}+\frac{f(x_1)}{x_2}$ □□□□□

□□□□□□1□ $f(x)$ □□□□ $(0,+\infty)$□

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$□

□ $h(x)=-x^2+ax-1$□△ $=a^2-4$□

□ $-2 \leq a \leq 2$□□△ ≤ 0□ $h(x) \leq 0$□□□□ $f'(x) \leq 0$□

□ $f(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□

□ $a>2$□□ $h(x)=0$□□□ $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}>0$□ $x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>0$□

□ $x \in (0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$□□ $h(x)<0$□□ $f'(x)<0$□

$x \in (\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$□$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$□□ $h(x)>0$□□ $f'(x)>0$□

$x \in (\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$□$+\infty)$□□ $h(x)<0$□ $f'(x)<0$□

故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递增，在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 递减，

$a<-2$ 时，令 $h(x)=0$，解得：$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<0$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}<0$，

故 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，

综上：$a\leq 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

$a>2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递减，在 $(\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 递增，在 $(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 递减.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=1(x_2>1)$，由 $a<\dfrac{5}{2}$，可得 $1<x_2<2$，

则 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_2}=2-x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2}+(x_2^2-\dfrac{1}{x_2^2})\ln x_2$，

令 $g(x)=2-x^2-\dfrac{1}{x^2}+(x^2-\dfrac{1}{x^2})\ln x(1<x<2)$，

$g'(x)=-x+\dfrac{1}{x^3}+2(x+\dfrac{1}{x^3})\ln x=\dfrac{1-x^4}{x^3}+2\dfrac{1+x^4}{x^3}\ln x=\dfrac{1+x^4}{x^3}(\dfrac{1-x^4}{1+x^4}+2\ln x)$，

□ $h(x)=\dfrac{1-x^4}{1+x^4}+2\ln x$，且 $h(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $(1,2)$ 上符号一致，

$h'(x)=\dfrac{-8x^3}{(1+x^4)^2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{-8x^4+2(1+x^4)^2}{(1+x^4)^2x}=\dfrac{2(1-x^4)^2}{(1+x^4)^2x}\geq 0$，

所以 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(1)=0$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ □□□□，□□ $g(x)\in\left(0,\dfrac{15}{4}\ln 2-\dfrac{9}{4}\right)$，

□ $\frac{f(x_2)}{x_1}+\frac{f(x_1)}{x_2}$ □□□□□□ $(0,\frac{15}{4}ln2-\frac{9}{4})$ □

7□□2021 □•□□□□□□□ $f(x)=x-ae^x(a\in R)$ □ $x\in R$□

□1□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□□□□ $y=f(x)$ □□□□□ x_1 □ x_2 □□ $x_1<x_2$ □

□i□□ a □□□□□□

□ii□□□□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□ a □□□□□□□□

□□□□□□1□ $f(x)=x-ae^x$ □

$\therefore$ □□□□ $f'(x)=1-ae^x$ □

① □ $a\leqslant 0$ □□ $f'(x)=1-ae^x>0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ $(-\infty,+\infty)$ □

② □ $a>0$ □□□ $f'(x)=1-ae^x=0$ □□ $x=-lna$ □

□ $x\in(-\infty,-lna)$ □□ $f'(x)>0$ □ $f(x)$ □□□□□

□ $x\in(-lna,+\infty)$ □□ $f'(x)<0$ □ $f(x)$ □□□□□

$\therefore f(x)$ □□□□□□□□ $(-\infty,-lna)$ □□□□□□□□ $(-lna,+\infty)$ □

□□□□□□ $a\leqslant 0$ □□ $f(x)$ □□□□□□□ $(-\infty,+\infty)$ □ $a>0$ □ $f(x)$ □□□□□□□□ $(-\infty,-lna)$ □□□□□□□□ $(-lna,+\infty)$ □

□2□ $f(x)=x-ae^x$ □

$\therefore f'(x)=1-ae^x$ □

□□□□□□□□□□

① $a\leqslant 0$ □□ $f'(x)>0$ □ R □□□□□ $\therefore f(x)$ □ R □□□□□□□□□□□

② $a>0$□□□ $f'(x)=0$ □□ $x=-\ln a$ □□ x□□□ $f'(x)$ □ $f(x)$ □□□□□□□□□

x	$(-\infty,-\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	□□	□□□ $-\ln a-1$	□□

$\therefore f(x)$ □□□□□□□ $(-\infty,-\ln a)$ □□□□□ $(-\ln a,+\infty)$ □

$\therefore$ □□ $y=f(x)$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□

① $f(-\ln a)>0$ □

② □□ $s_1\in(-\infty,-\ln a)$ □□□ $f(s_1)<0$ □

③ □□ $s_2\in(-\ln a,+\infty)$ □□□ $f(s_2)<0$ □

□ $f(-\ln a)>0$ □□ $-\ln a-1>0$ □□□ $0<a<e^{1}$ □

□ $s_1=0$ □□□ $s_1\in(-\infty,-\ln a)$ □□ $f(s_1)=-a<0$ □

□ $s_2=\frac{2}{a}+\ln\frac{2}{a}$ □□□ $s_2\in(-\ln a,+\infty)$ □□ $f(s_2)=(\frac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}})+(\ln\frac{2}{a}-e^{\frac{2}{a}})<0$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $(0,e^{1})$ □

(ii) □□□ $f(x)=x-ae^{x}$ □

$\therefore a=\frac{x}{e^{x}}$ □

□ $g(x)=\frac{x}{e^{x}}$ □

□□□□ $g'(x)=\frac{1-x}{e^{x}}$ □

$\therefore g(x)$ □ $(-\infty,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ $x\in(-\infty$ □ $0]$ □□ $g(x)\ldots0$ □□ $x\in(0,+\infty)$ □□ $g(x)>0$ □

□□□ x_1 □ x_2 □□ $a=g(x_1)$ □ $a=g(x_2)$ □

□ $a\in(0,\frac{1}{e})$ □□ $g(x)$ □□□□□

$\therefore x_1\in(0,1)$ □ $x_2\in(1,+\infty)$ □

□□□□ $a_1,a_2\in(0,\frac{1}{e})$ □□ $a_1>a_2$ □ $g(m_1)=g(m_2)=a_1$ □□□ $0<m_1<1<m_2$ □

$g(n_1)=g(n_2)=a_2$ □□□ $0<n_1<1<n_2$ □

□ $g(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□

□ $a_1>a_2$ □□ $g(m_1)>g(n_1)$ □□□□□ $m_2<n_2$ □

□ $m_1>n_1>0$ □

$\therefore \frac{m_2}{m_1}<\frac{n_2}{m_1}<\frac{n_2}{n_1}$ □

□ $\frac{x_2}{x_1}$ □□ a □□□□□□□□□□□□